Approximation of Solutions of a Variational Inequality Problem (Mathematical Programming Concerning Decision Makings and Uncertainties)

AUTHOR(S):

豊田, 昌史

CITATION:

豊田, 昌史. Approximation of Solutions of a Variational Inequality Problem (Mathematical Programming Concerning Decision Makings and Uncertainties). 数理解析研究所講究録 2004, 1373: 126-132

ISSUE DATE:

2004-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/25535

数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 126-132

Approximation of Solutions of a Variational Inequality Problem

東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
豊田 昌史 (Toyoda Masashi)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

変分不等式問題とは, 実 Hilbert 空間 H の閉凸部分集合 K から H への写像 A に対して,

$$\langle Au_0, v-u_0\rangle \geq 0 \quad (\forall v \in K)$$

をみたすような $u_0 \in K$ を見つける問題のことである. 以降, このような u_0 全体のことを $\mathrm{VI}(K,A)$ と書くことにする. 変分不等式問題は, 凸関数の最小化問題や不動点問題の抽象化である.

変分不等式問題の解を近似する点列の構成方法として, 以前に次の結果を考察した ([6]).

定理 1. H を実 *Hilbert* 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. A を K から H への $\alpha>0$ に関する逆強単調写像とし, $\mathrm{VI}(K,A)\neq\emptyset$ とする. 点列 x_n を

$$\begin{cases} x_0 = x \in K, \\ y_n = P_K(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) y_n, \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

と構成する. ここで $\lambda_n \in [a,b]$, $a,b \in (0,2\alpha)$ でありまた, $\alpha_n \in [0,c]$, $c \in (0,1)$ である. このとき, 点列 x_n はある $z \in \mathrm{VI}(K,A)$ に弱収束する.

ここで P_K は H から K への上への距離射影である. 距離射影の定義や性質に関しては, 例えば [5] を見よ.

写像 P_K のもつ性質のひとつとして, 非拡大性がある. K 上の写像 S が非拡大であるとは, 任意の $x,y\in K$ に対して $\|Sx-Sy\|\leq\|x-y\|$ が成り立つときをいう. S の不動点集合を $\mathrm{F}(S)$ と書くことにする. すると $\mathrm{F}(P_K)=K$ である. この表記を利用すると, $\mathrm{VI}(K,A)$ は非拡大写像 S に関する $\mathrm{VI}(\mathrm{F}(S),A)$ の特別な場合と捉え直すことができる. それでは, $\mathrm{VI}(\mathrm{F}(S),A)$ の元に収束す

る点列はどのように構成されるのだろうか? 本論文では, 逆強単調写像に関する VI(F(S), A) の元への収束定理について述べる.

2 主結果

実 Hilbert 空間 H の閉凸部分集合 K から H への写像 A が逆強単調であるとは, ある数 $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $u, v \in K$ に対して

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha \|Au - Av\|^2$$

が成り立つことを言う ([1]). このとき更に $\lambda \leq 2\alpha$ ならば, $I - \lambda A$ は K から H への非拡大写像となる. 実際, つぎの計算からそれがわかる. $u, v \in K$ に対して

$$\begin{aligned} \|(I-\lambda A)u - (I-\lambda A)v\|^2 &= \|(u-v) - \lambda(Au - Av)\|^2 \\ &= \|u-v\|^2 - 2\lambda\langle u-v, Au-Av\rangle \\ &\quad +\lambda^2\|Au-Av\|^2 \\ &\leq \|u-v\|^2 + \lambda(\lambda - 2\alpha)\|Au-Av\|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

となる. また, A は Lipschitz 連続である. すなわち

$$\|Au - Av\| \leq \frac{1}{\alpha}\|u - v\|$$

が任意の $u, v \in K$ に対して成り立つ. 逆強単調写像 A に関して, 後に示す定理 3 を得ることができる.

定理 3 を示す前に, 補助定理を紹介する. つぎの結果は, Schu [4] によって一様凸な Banach 空間において示された. 本論文では Hilbert 空間で適用する. ここでは Hilbert 空間での命題として証明をつけておく.

補助定理 2. *H を実 Hilbert 空間とし, 点列 α_n は $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ が各 n に対して成り立つものとする. また H の点列 v_n と w_n は, ある $c > 0$ に対して $\limsup_{n\to\infty}\|v_n\| \leq c$, $\limsup_{n\to\infty}\|w_n\| \leq c$ であり $\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n v_n + (1-\alpha_n)w_n\| = c$ をみたすものとする. このとき*

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - w_n\| = 0$$

が成り立つ.

証明. いま $\lim_{n\to\infty}\|v_n - w_n\| = 0$ が成り立たないとする. このとき, ある $\epsilon > 0$ と部分列 v_{n_i}, w_{n_i} が存在して

$$\|v_{n_i} - w_{n_i}\| \geq \epsilon$$

が任意の i に対して成り立つ．この部分列 n_i に対して

$$\lim_{i\to\infty}\|v_{n_i}\|\le c,\quad \lim_{i\to\infty}\|w_{n_i}\|\le c,\quad \lim_{i\to\infty}\alpha_{n_i}=\alpha\in[a,b]$$

が成り立つと仮定してもよい．このとき

$$\begin{aligned}a(1-b)\epsilon^2 &\le \alpha_{n_i}(1-\alpha_{n_i})\|v_{n_i}-w_{n_i}\|^2\\ &= \alpha_{n_i}\|v_{n_i}\|^2+(1-\alpha_{n_i})\|w_{n_i}\|^2-\|\alpha_{n_i}v_{n_i}+(1-\alpha_{n_i})w_{n_i}\|^2\end{aligned}$$

である．$i\to\infty$ とするとき

$$a(1-b)\epsilon^2\le\alpha\lim_{i\to\infty}\|v_{n_i}\|^2+(1-\alpha)\lim_{i\to\infty}\|w_{n_i}\|^2-c^2\le 0$$

を得る．ところが $0<a(1-b)\epsilon^2$ であるから，これは矛盾である． □

主結果を示す．

定理 3. H を実 *Hilbert* 空間とし，A を H からそれ自身への $\alpha>0$ に関する逆強単調写像とし，S を H からそれ自身への非拡大写像とする．いま $\mathrm{F}(S)\cap A^{-1}0\neq\emptyset$ とする．点列 x_n を

$$\begin{cases}x_0=x\in H,\\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)S(x_n-\lambda_n Ax_n),\quad n=0,1,2,\dots\end{cases}$$

と構成する．ここで $\lambda_n\in[a,b]$, $a,b\in(0,2\alpha)$ でありまた，$\alpha_n\in[c,d]$, $c,d\in(0,1)$ である．このとき，点列 x_n はある $z\in\mathrm{VI}(\mathrm{F}(S),A)$ に弱収束する．

証明. はじめに $y_n=x_n-\lambda_n Ax_n$ とおく．いま $u\in\mathrm{F}(S)\cap A^{-1}0$ とする．(1) より，

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u\|^2 &= \|\alpha_n(x_n-u)+(1-\alpha_n)(Sy_n-u)\|^2\\ &\le \alpha_n\|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n)\|Sy_n-u\|^2\\ &\le \alpha_n\|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n)\|y_n-u\|^2\\ &\le \alpha_n\|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n)\{\|x_n-u\|^2\\ &\qquad +\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2\}\\ &= \|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n)\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2\\ &\le \|x_n-u\|^2+(1-d)a(b-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2\\ &\le \|x_n-u\|^2\end{aligned}$$

をみたす．よって極限値 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|$ が存在し $Ax_n-Au\to 0$ を得る．これより点列 x_n と y_n は有界である．写像 $I-\lambda_n A$ は非拡大であることと

$u = u - \lambda_n Au$ が成り立つことから

$$
\begin{aligned}
\|y_n - u\|^2 &= \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\|^2 \\
&\qquad -\|(y_n - u) - \{(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\}\|^2\Big\} \\
&\le \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 \\
&\qquad -\|(y_n - x_n) + \lambda_n(Ax_n - Au)\|^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle - \lambda_n^2\|Ax_n - Au\|^2\Big\}
\end{aligned}
$$

を得る. ゆえに

$$
\|y_n-u\|^2 \le \|x_n-u\|^2-\|y_n-x_n\|^2-2\lambda_n\langle y_n-x_n, Ax_n-Au\rangle-\lambda_n^2\|Ax_n-Au\|^2
$$

を得る. これよりさらに

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\|^2 &\le \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\|Sy_n - u\|^2 \\
&\le \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\|y_n - u\|^2 \\
&\le \|x_n - u\|^2 - (1-\alpha_n)\|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n(1-\alpha_n)\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle \\
&\qquad -\lambda_n^2(1-\alpha_n)\|Ax_n - Au\|^2 \\
&\le \|x_n - u\|^2 - (1-d)\|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n(1-\alpha_n)\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle \\
&\qquad -\lambda_n^2(1-\alpha_n)\|Ax_n - Au\|^2
\end{aligned}
$$

である. いま $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-u\|^2$ と $Ax_n - Au \to 0$ から, $y_n - x_n \to 0$ を得る. 写像 A は Lipschitz 連続であるから, $Ax_n - Ay_n \to 0$ も成り立つ. 点列 x_n が有界であることから, ある部分列 x_{n_i} が存在してある点 $z \in H$ に弱収束する. このとき $z \in \mathrm{F}(S) \cap A^{-1}0$ をみたす. 以下, これを確認する.

まず $z \in A^{-1}0$ を確認する. 空間 H の任意の元を v とする. $y_n - x_n = \lambda_n Ax_n$ であることに注意して

$$
\begin{aligned}
\langle v - y_{n_i}, Av\rangle &= \langle v - y_{n_i}, Av\rangle - \langle v - y_{n_i}, Ax_{n_i} + \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\rangle \\
&= \langle v - y_{n_i}, Av - Ax_{n_i} - \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\rangle \\
&= \langle v - y_{n_i}, Av - Ay_{n_i}\rangle + \langle v - y_{n_i}, Ay_{n_i} - Ax_{n_i}\rangle \\
&\qquad -\langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\rangle \\
&\ge \langle v - y_{n_i}, Ay_{n_i} - Ax_{n_i}\rangle - \langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\rangle.
\end{aligned}
$$

を得る．よって $\langle v-z, Av\rangle \geq 0$ である．

空間 H の任意の元を w とする．そこで点列

$$w_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}w$$

を構成する．すると

$$\langle w_n - z, Aw_n\rangle \geq 0$$

である．これより

$$\langle w - z, Aw_n\rangle \geq 0$$

を得る．$n \to \infty$ とすれば

$$\langle w - z, Az\rangle \geq 0$$

を得る．ここで w は任意だから $Az = 0$ である．すなわち $z \in A^{-1}0$ を得る．

つぎに $z \in \mathrm{F}(S)$ を示す．集合 $\mathrm{F}(S) \cap A^{-1}0$ の任意の元を u とする．いま

$$\|Sy_n - u\| \leq \|y_n - u\| = \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\| \leq \|x_n - u\|$$

であるから $\limsup_{n\to\infty} \|Sy_n - u\| \leq c$ である．ここで $c = \lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$ である．さらに

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n(x_n-u) + (1-\alpha_n)(Sy_n - u)\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - u\| \\ &= c \end{aligned}$$

である．補助定理 2 から，

$$\lim_{n\to\infty} \|Sy_n - x_n\| = 0$$

である．また

$$\begin{aligned} \|Sx_n - x_n\| &\leq \|Sx_n - Sy_n\| + \|Sy_n - x_n\| \\ &\leq \|x_n - y_n\| + \|Sy_n - x_n\| \end{aligned}$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$$

である．すると $z = Sz$ となる．いま $z \neq Sz$ とすると，Hilbert 空間は Opial 条件をみたす (例えば [5] を見よ) ことから

$$\begin{aligned} \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\| &< \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - Sz\| \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} (\|x_{n_i} - Sx_{n_i}\| + \|Sx_{n_i} - Sz\|) \\ &= \liminf_{i\to\infty} \|Sx_{n_i} - Sz\| \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\| \end{aligned}$$

が得られ, 矛盾である. よって $z \in \mathrm{F}(S)$ を得る.

他の部分点列 x_{n_j} で $z' \in H$ に弱収束するものを考える. このとき, 上記と同様にして $z' \in \mathrm{F}(S) \cap A^{-1}0$ である. さらに $z = z'$ が示せる. $z \neq z'$ と仮定する. Hilbert 空間は Opial 条件をみたすことから,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| &= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\| \\ &< \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z'\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z'\| = \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z'\| \\ &< \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| \end{aligned}$$

である. これは矛盾である. よって $z = z'$ である. 以上から点列 x_n は $z \in \mathrm{F}(S) \cap A^{-1}0$ に弱収束する. いま $\mathrm{F}(S) \cap A^{-1}0 \subset \mathrm{VI}(\mathrm{F}(S), A)$ であるから $z \in \mathrm{VI}(\mathrm{F}(S), A)$ である. □

3 おわりに

本論文においては, 変分不等式問題の解集合 $\mathrm{VI}(K, A)$ をその特別な場合として含む集合 $\mathrm{VI}(\mathrm{F}(S), A)$ への収束定理を考えた. 集合 $\mathrm{VI}(\mathrm{F}(S), A)$ を, 信号処理等の逆問題から扱った研究が, 山田と小倉によってなされている ([7, 2, 3]). それらと本研究との関係を調べたい.

参考文献

[1] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-valued Anal. **6** (1998) 313–344.

[2] N. Ogura and I. Yamada, *Non-strictly convex minimization over the fixed point set of an asymptotically shrinking nonexpansive mapping*, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 113–137.

[3] N. Ogura and I. Yamada, *Nonstrictly convex minimization over the bounded fixed point set of a nonexpansive mapping*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 129–135.

[4] J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991) 153–159.

[5] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, 2000.

[6] M. Toyoda, *Variational inequality problems for monotone mappings*, 京都大学数理解析研究所講究録, **1306** (2003), 118–124.

[7] I. Yamada, *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*, Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Butnariu, Censor and Reich, eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 473–504.